Soit $f : x \rightarrow f(x) = 2x + \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$, pour tout x réel.

a) Montrer que f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$ lorsque x tend vers $-\infty$.

$$f(x) - (2x - 2) = 2x + \frac{e^x - 2}{e^x + 1} - 2x + 2 = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} + 2 = \frac{(e^x - 2) + 2(e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{3e^x}{e^x + 1} .$$

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{3\times 0}{0 + 1} = 0$.

La droite $D_1 : y = 2x - 2$ est bien asymptote oblique à C_f vers $-\infty$.

b) Montrer que f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$f(x) - (2x + 1) = 2x + \frac{e^x - 2}{e^x + 1} - 2x - 1 = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} - 1 = \frac{(e^x - 2) - (e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{-3}{e^x + 1} .$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-3}{\infty + 1} = 0$.

La droite $D_2 : y = 2x + 1$ est bien asymptote oblique à C_f vers $+\infty$.