Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) **$\ln (x + 3) = 1$**

$\ln (x + 3)$ est défini si et seulement si $x + 3 > 0$, soit $x > -3$, d'où le domaine de définition $D =]-3 ; +\infty[$.

On sait que $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$.

$\ln (x + 3) = 1 \Leftrightarrow \ln (x + 3) = \ln e \Leftrightarrow x + 3 = e$, soit $x = -3 + e$, qui appartient à D , d'où : $S = \{-3 + e\}$.

b) $\ln x = -1$

$\ln x$ est défini si et seulement si $x > 0$, , d'où le domaine de définition $D =]0 ; +\infty[$.

$\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} > 0$, d'où : $S = \{+\frac{1}{e}\}$.

c) $\ln (2x – 1) = 2$

$\ln (2x – 1)$ est défini si et seulement si $2x - 1 > 0$, soit $x > +\frac{1}{2}$, soit $D =] +\frac{1}{2} ; +\infty[$.

$\ln (2x – 1) = 2 \Leftrightarrow \ln (2x – 1) = 2.\ln e \Leftrightarrow \ln (2x – 1) = \ln (e^2) \Leftrightarrow 2x – 1 = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 + e^2}{2} > +\frac{1}{2}$.

D'où : $S = \{ \frac{1 + e^2}{2} \}$.

d) $\ln \left(\frac{x + 1}{2x + 1}\right) = \ln \left(\frac{1}{3}\right)$

$\ln \left(\frac{x + 1}{2x + 1}\right)$ est défini si et seulement si $\frac{x + 1}{2x + 1} > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > -\frac{1}{2}$, soit $D =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$.

$\text{n} \left(\frac{x + 1}{2x + 1}\right) = \ln \left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x + 1) = 2x – 1 \Leftrightarrow 3x + 3 = 2x – 1 \Leftrightarrow x = -4 \in D$, soit $S = \{-4\}$.

e) $\ln (3 – 2x) = 0$

$\ln (3 – 2x)$ est défini si et seulement si $3 – 2x > 0$, soit $x < +\frac{3}{2}$, d'où : $D =]-\infty ; +\frac{3}{2} [$.

$\ln (3 – 2x) = 0 \Leftrightarrow 3 – 2x = 1 \Leftrightarrow x = +1$, soit $S = \{+1\}$.

f) **$\ln (3x – 1) – \ln (x + 2) = -\ln 2$.**

$\ln (3x – 1) – \ln (x + 2)$ est défini si et seulement si $\begin{cases} 3x – 1 > 0 \Leftrightarrow x > +\frac{1}{3} \\ \text{et} \\ x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \end{cases}$, d'où $x > +\frac{1}{3}$. $D =] +\frac{1}{3} ; +\infty [$.

On sait que $\ln a – \ln b = \ln \frac{a}{b}$, d'où : $\ln (3x – 1) – \ln (x + 2) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln [(3x – 1)(x + 2)] = \ln \frac{1}{2}$.

On déduit : $(3x – 1)(x + 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x^2 + 5x – \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 10x – 5 = 0$.

$\Delta = b^2 – 4ac = 220$. Les racines sont $\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{220}}{12} = \frac{-5 + \sqrt{55}}{6} \approx 0,40 \text{ non valable} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{220}}{12} = \frac{-5 - \sqrt{55}}{6} < 0 \text{ valable} \end{cases}$.

On déduit $S = \{ \frac{-5 - \sqrt{55}}{6} \}$.