Déterminer :

a) $\dfrac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$.

$\dfrac{\ln(x)}{1+\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x)\left(\dfrac{1}{\ln(x)}+1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\ln(x)}+1}$. On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{1+\ln(x)} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln(x)}{2+\ln(x)}$.

$\dfrac{1+\ln(x)}{2+\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)\left(\dfrac{1}{\ln(x)}+1\right)}{\ln(x)\left(\dfrac{2}{\ln(x)}+1\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{\ln(x)}+1}{\dfrac{2}{\ln(x)}+1}$. On sait $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{2+\ln(x)} = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x+2} = 0^+$, et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$. On déduit : $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$. On déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln^2(x)}{2+\ln(x)}$.

$\dfrac{1-\ln^2(x)}{2+\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \ln(x)\right)}{\ln(x)\left(\dfrac{2}{\ln(x)}+1\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{\ln(x)} - \ln(x)}{\dfrac{2}{\ln(x)}+1}$.

Sachant $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$, on déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln^2(x)}{2+\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln(x)) = +\infty$.