1/ Déterminer sur $\mathbb{R}$ les primitives de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$[\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u} \Rightarrow [\ln(x^2+1)]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, d'où : $F_k(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$

2/ Déterminer sur]0 ; +∞[les primitives de $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{2x}$.

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{2x} = \dfrac{x^2+3x-4}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{x}$.

Sachant $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$, on déduit : $F_k(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x - 2\ln(x) + k$.

3/ Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln(x)}$ nulle en $x = e$.

On sait que $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$. $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{u'}{u}$.

On déduit : $F_k(x) = \ln|\ln(x)| + k$, avec $F_k(e) = \ln(\ln(e)) + k = \ln(1) + k = k$.

D'où : $k = 0 \Rightarrow F(x) = \ln[\,|\ln(x)|\,]$.

Remarque : $F(x) = \ln(-\ln(x))$ sur $]0 ; 1[$ et $F(x) = \ln(\ln(x))$ sur $]1 ; +\infty[$.

4/ Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ nulle en $x = +1$.

On sait que $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$, et $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$.

D'où : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = u'.u \Rightarrow F_k(x) = \dfrac{1}{2}u^2 + k = \dfrac{1}{2}\ln^2(x) + k$.

$F_k(1) = \dfrac{1}{2}\ln^2(1) + k = k$, d'où $k = 0$ et $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

5/ Déterminer sur $\mathbb{R}$ les primitives de $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

On sait que $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$, donc $(\ln(e^{2x}+1))' = \dfrac{(e^{2x})'}{e^{2x}+1} = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

On déduit que $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \Rightarrow F_k(x) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + k$.