Etudier le sens de variation de la suite numérique (u_n) telle que $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$, pour tout n entier naturel.

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$ est donnée sous forme *fonctionnelle* , avec $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

1[ère] méthode :

Il suffit d'étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, donc le signe de la dérivée $f'(x)$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2(3x+1) - 3(2x+1)}{(3x+1)^2} = -\dfrac{1}{(3x+1)^2} < 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

La suite (u_n) est donc *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.

2[ème] méthode :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)+1}{3(n+1)+1} - \dfrac{2n+1}{3n+1} = \dfrac{2n+3}{3n+4} - \dfrac{2n+1}{3n+1} = \dfrac{(2n+3)(3n+1) - (2n+1)(3n+4)}{(3n+1)(3n+4)}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(6n^2 + 11n + 3) - (6n^2 + 11n + 4)}{(3n+1)(3n+4)} = -\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)} < 0$ sur $\mathbb{N}$.

On déduit : $u_{n+1} < u_n$, pour tout n entier naturel, soit (u_n) *strictement décroissante* sur $\mathbb{N}$.