Soit la suite numérique u telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \text{ , } u_1 = 3 \\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit la suite v telle que $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite v est *constante*. En préciser la valeur.

v est une suite *constante*, si et seulement si $v_{n+1} = v_n$, ou $v_{n+1} - v_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite v est constante, de valeur $v_n = v_0 = u_1 - u_0 = 1$. On déduit $v_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

Sachant $v_n = u_{n+1} - u_n$, on déduit : $u_{n+1} - u_n = 1 \iff u_{n+1} = u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite u est arithmétique, de raison $r = +1$ et telle que $u_0 = 2$.

On déduit : $u_n = u_0 + nr = 2 + 1 \times n$, soit $u_n = n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.