Soit la suite numérique u telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que la suite u est majorée par 2 .

Soit la proposition de récurrence P_n : « $u_n \leq 2$ ».

- *Initialisation* : P_0 est vraie ($u_0 = 1 \Rightarrow u_0 \leq 2$) .

- *Hérédité* : P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

P_n vraie ($u_n \leq 2$) $\Rightarrow$ $u_n + 2 \leq 4$ $\Rightarrow$ $\sqrt{u_n + 2} \leq 2$ la racine conservant l'ordre, d'où P_{n+1} vraie ($u_{n+1} \leq 2$).

- *Conclusion* : P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($u_n \leq 2$). La suite u est *majorée* par 2 .

b) Vérifier que la suite u est croissante. Qu'en conclure ?

Soit la proposition de récurrence P_n : « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

- *Initialisation* : P_0 est vraie ($u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$, soit $u_0 \leq u_1$) .

- *Hérédité* : P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

P_n vraie ($u_n \leq u_{n+1}$) $\Rightarrow$ $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$ $\Rightarrow$ $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$, d'où P_{n+1} vraie ($u_{n+1} \leq u_{n+2}$).

- *Conclusion* : P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($u_n \leq u_{n+1}$). La suite u est *croissante*.

La suite u , *croissante* et *majorée* par 2 , est *convergente* vers $L \leq 2$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Si $n \to +\infty$, alors $u_n \to L$ et $u_{n+1} \to L$.

Donc la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ devient $L = \sqrt{L + 2}$ $\Rightarrow$ $L^2 = L + 2$, soit $L^2 - L - 2 = 0$.

L'équation admet $L_1 = -1$ (impossible) et $L_2 = +2$ comme solutions.

On déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.