Soit la suite numérique u telle que $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On constate que $u_1 \geq 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n^2$ implique $u_n \geq 0$ (carré) , pour tout $n > 1$.

La suite u est minorée par 0 ($u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

De même : On constate $u_1 \leq 1$ (Initialisation de la proposition P_n : « $u_n \leq 1$) .

Par ailleurs $u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1$, soit $u_{n+1} \leq$ (Hérédité).

On conclue que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($u_n \leq 1$).

La suite u est majorée par 1 , donc bornée : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Etudier le sens de variation de la suite u . Qu'en conclure ?

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n = u_n(u_n - 1)$.

On sait $\boldsymbol{u_n \geq 0}$ et $u_n \leq 1$, soit $\boldsymbol{u_n - 1 \leq 0}$. On déduit que $u_n(u_n - 1) \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite u est décroissante, et comme elle est minorée par 0 , on conclue qu'elle est convergente vers $L \geq 0$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Si $n \to +\infty$, alors $u_n \to L$ et $u_{n+1} \to L$.

Donc la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2$ devient $L = L^2 \Rightarrow L^2 - L = 0$, soit $L(L-1) = 0$.

L'équation admet $L_1 = +1$ (impossible, car $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et u décroissante) et $L_2 = 0$ comme solutions.

On déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.