**Soit les suites numériques $u$ et $v$ telles que $\begin{cases} u_n = \dfrac{n-1}{n} \\ v_n = \dfrac{n+1}{n} \end{cases}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$ .**

**a) Montrer que $u$ et $v$ sont deux suites adjacentes.**

Deux suites sont *adjacentes* si et seulement l'une est croissante, l'autre décroissante, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

Elles sont alors convergentes, vers une même limite $L$ .

$u_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ .

La suite $u$ est strictement croissante.

$v_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0$ .

La suite $u$ est strictement décroissante.

Par ailleurs : $v_n - u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

Les suites $u$ et $v$ sont adjacentes, donc admettent une limite commune $L$ .

**b) Déterminer leur limite commune.**

On constate aisément que $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 \end{cases}$ , soit $L = +1$ .