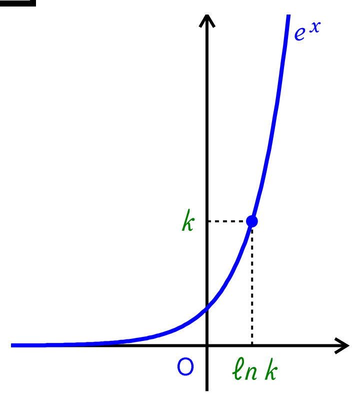
LOGARITHME NÉPÉRIEN

I Définition - Propriétés - Relation fonctionnelle



Rappel

La fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante sur IR.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,
pour tout $k \in \left]0 ; +\infty\right[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans IR. Cette solution est notée $\ell n\, k$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre l'unique réel y tel que $e^y = x$.
La fonction logarithme népérien est notée ℓn
On notera :

$$\begin{array}{rcl} \ell n : \left]0 ; +\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ell n\, x \end{array}$$

Remarques

- La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle (de la même façon que la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carré sur $\left[0 ; +\infty\right[$).
- On sait que $e^0 = 1$ donc $\ell n\, 1 = 0$; de même $e^1 = e$ donc $\ell n\, e = 1$.

Propriétés (voir démonstration 01)

- Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ell n\, x} = x$
- Pour tout réel x, on a $\ell n\, e^x = x$
- $\ell n\, 1 = 0$ et $\ell n\, e = 1$
- $\begin{cases} x \in \left]0 ; +\infty\right[\\ y = \ell n\, x \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$

Exercice 01 (voir **réponses et correction**)

Déterminer $\ell n\, e^2$; $\ell n\, e^{-3}$; $e^{\ell n\, 6}$; $e^{\ell n\, 2 + \ell n\, 3}$
Justifier que $\ell n\, 6 = \ell n\, 2 + \ell n\, 3$
Démontrer que $\ell n\, 5 - \ell n\, 7 = \ell n \dfrac{5}{7}$

Exercice 02 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans IR les équations : $\ell n\, x = 4$; $\ell n\, x = -2$; $3\, \ell n\, x = 2$; $\ell n\, x + \ell n\, 5 - \pi = 0$

Remarque

On sait que la fonction exponentielle transforme une somme en produit, on peut alors penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, va transformer un produit en somme.

Propriétés (voir démonstration 02)

- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\ell n(a \times b) = \ell n\, a + \ell n\, b$; $\ell n \dfrac{1}{a} = -\ell n\, a$; $\ell n \dfrac{a}{b} = \ell n\, a - \ell n\, b$; $\ell n \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ell n\, a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ell n\, a^n = n\, \ell n\, a$
- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^*$), alors
  $\ell n\, (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ell n\, a_1 + \ell n\, a_2 + \dots + \ell n\, a_n$
  (Le logarithme népérien d'un produit de n nombres est égal à la somme des logarithmes népériens de ces nombres)

Exercice 03 (voir **réponses et correction**)

Écrire plus simplement : $\ell n\, 14 - \ell n\, 7$; $\ell n \dfrac{5}{2} + \ell n \dfrac{2}{5}$; $\dfrac{\ell n\, 100}{\ell n\, 10}$

$\ell n\, 8 - \ell n\, 12 + \ell n\, 15$; $\ell n\, 10\,000 + \ell n\, 0{,}01$; $\ell n(3 - 2\sqrt{2}) + \ell n(3 + 2\sqrt{2})$

Exercice 04 (voir **réponses et correction**)

Démontrer que pour tout réel x, on a : $\ell n\, (1 + e^x) = x + \ell n\, (1 + e^{-x})$

Exercice 05 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ell n\, x + \ell n\, (x - 1) = \ell n\, 6$

Exercice 06 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

- $\ell n\, (x^2 + x) = 1$
- $\ell n\, x + \ell n(x + 1) = 1$

Exercice 07 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ell n\, x + \ell n\, (4 - x) = \ell n\, (2x - 1) + \ell n\, 3$

Exercice 08 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

- $\ell n \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right) = -1$
- $\ell n(x + 1) = -1 + \ell n(x - 1)$

II Variations de la fonction logarithme népérien

Propriétés (voir démonstration 03)

- La fonction ℓn est définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on a $(\ell n\; x)' = \dfrac{1}{x}$
- La fonction ℓn est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
- $x > 1 \Leftrightarrow \ell n\, x > 0$ et $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ell n\, x < 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ell n\, x = -\infty$.
- Le tableau de variations de la fonction ℓn est :

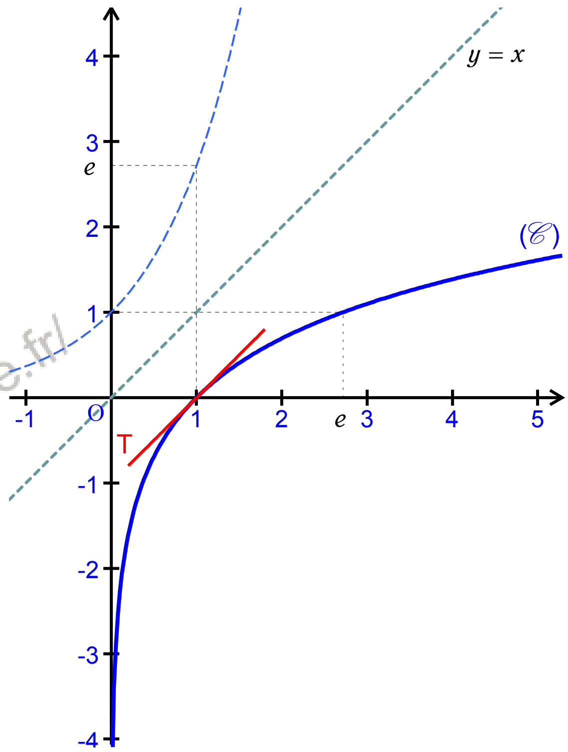
x	0	$+\infty$
ℓn	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Propriétés (voir démonstration 04)

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\, (1 + x)}{x} = 1$ (nombre dérivé en 1 de $x \mapsto \ell n\, x$).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, \ell n\, x = 0$

xmaths http://xmaths.free.fr/

Courbe représentative



On a vu que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ell n\, x = -\infty$

La courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe Oy .

$(\mathscr{C})$ a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T d'équation $y = x - 1$.
(On peut justifier que $(\mathscr{C})$ se situe au-dessous de sa tangente T)

On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$

Cela signifie que le logarithme népérien de x croît infiniment moins vite que x. Cela justifie que la courbe $(\mathscr{C})$ a tendance à prendre une direction parallèle à l'axe (Ox) lorsque x tend vers $+\infty$.

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 09 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$\ell n\, x < 1$ $\qquad$ $2\, \ell n\, x - 1 \geqslant 0$ $\qquad$ $\ell n\, (2x - 1) + 1 \leqslant 0$

Exercice 10 (voir **réponses et correction**)

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$\ell n\, x > \ell n\, (2x - 1)$ $\qquad$ $\ell n\, (1 + e^x) > 0$ $\qquad$ $\ell n \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x} \geqslant 1$

Exercice 11 (voir **réponses et correction**)

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x - \ell n\, x$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ell n\, x}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - 1 + \ell n\, x$

Exercice 12 (voir **réponses et correction**)

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, (1 + \sqrt{1 + x^2}\,)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ell n\, (1 + \sqrt{1 + x^2}\,)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \ell n\, (1 + \sqrt{1 + x^2}\,)$

Exercice 13 (voir **réponses et correction**)

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ell n\, x$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ell n\, x}{x^2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ell n\, x}{x^2}$

Propriété (admise)

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, la fonction $\ell n \circ u$ qui à x associe $\ell n\, (\, u(x)\,)$ est dérivable sur I, et on a : $(\ell n \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$ ou encore $(\ell n(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exercice 14 (voir **réponses et correction**)

Pour chacune des fonctions, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = \ell n\, (3x - 1)$ $\qquad$ $g(x) = 2\, \ell n\, x$ $\qquad$ $h(x) = \ell n(x^2)$

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = 2x + 1 + \ell n\, x$ $\quad$ $g(x) = \ell n\,(1 + x^2)$ $\quad$ $h(x) = \ell n\,(2x - x^2)$

Exercice 16 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = x\, \ell n\, x - x$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{2\, \ell n\,(x + 1)}{x + 1}$ $\quad$ $h(x) = \ell n(1 + \sqrt{x})$

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = \ell n(e^x + 1)$ $\quad$ $g(x) = x^2 + (\ell n\, x)^2$ $\quad$ $h(x) = e^x\, \ell n\, x$

Exercice 18 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + \ell n\, x}{x}$

Faire l'étude et la représentation graphique de f.

Exercice 19 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ell n\, x - 3(\ell n\, x)^2$
Faire l'étude et la représentation graphique de f. Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$.

Exercice 20 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ell n \left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$

1°) Montrer que f est définie pour $x \in\,]-2\,;2[$ et déterminer les limites de f en -2 et en 2.
2°) Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
3°) Tracer la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.
4°) Justifier que pour tout $x \in\,]-2\,;2[\quad f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

Exercice 21 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ell n(1 + e^x)$.
Donner l'ensemble de définition de f. Étudier les variations de f. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f.
Tracer sur le même graphique la droite D d'équation $y = x$.
Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - x = \ell n\,(1 + e^{-x})$.

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$. Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 22 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ell n(x)}{x}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ell n(x)$.
Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2°) a) Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.
c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3°) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $(\mathscr{C})$ et D.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ell n(k)}{k}$. Justifier que cette distance tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

III Logarithme décimal

Remarque

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)
Cette fonction est appelée fonction logarithme décimal.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal et on note ℓog la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \ell og \ :\ &]0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \ & \mapsto \ell og\ x = \frac{\ell n\ x}{\ell n\ 10} \end{aligned}$$

Propriétés

(voir démonstration 05)

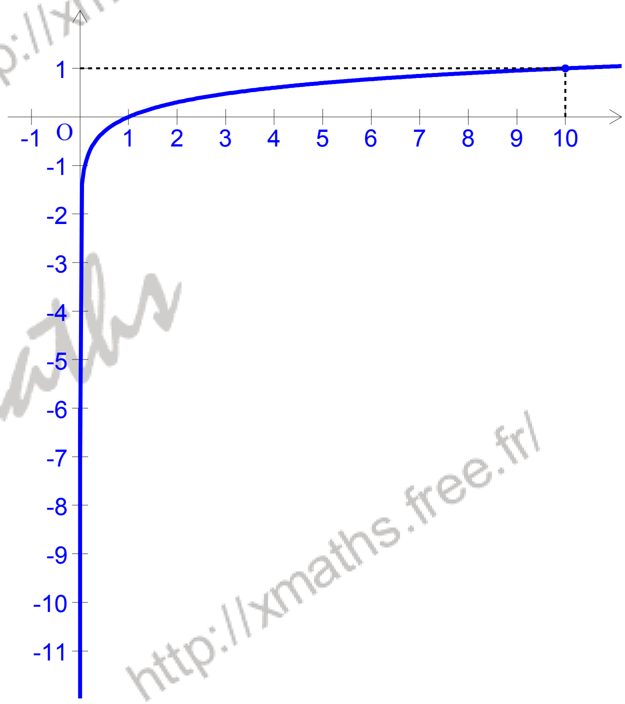
- $\ell og\ 1 = 0$ et $\ell og\ 10 = 1$
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\ell og(a \times b) = \ell og\ a + \ell og\ b$; $\ell og\ \frac{1}{a} = -\ \ell og\ a$; $\ell og\ \frac{a}{b} = \ell og\ a - \ell og\ b$; $\ell og\ \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ell og\ a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ell og\ a^n = n\ \ell og\ a$

Remarques

La fonction logarithme décimal est définie par $\ell og\ x = k \times \ell n\ x$ avec $k = \frac{1}{\ell n\ 10}$ et par conséquent $k > 0$.

Il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.

x	0	$+\infty$
ℓog	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



Les calculatrices possèdent une touche log correspondant à la fonction logarithme décimal.