LIMITES DE SUITES

I Limites finies ou infinies

Exercice 01 (voir réponses et correction)

Pour chacune des suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1°) $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ 2°) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ 3°) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

4°) $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ 5°) $u_n = \dfrac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geqslant 6$ 6°) $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

On considère la suite u_n définie par récurrence par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 .

2°) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 à u_{10} . Conjecturer la valeur limite ℓ de la suite (u_n).

3°) En utilisant un algorithme déterminer le premier entier pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$

Exercice 03 (voir réponses et correction)

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 2$.

1°) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner des valeurs approchées de u_1 à u_{10} puis des valeurs approchées de u_{20} et de u_{50} .
Emettre une conjecture sur la valeur limite de la suite (u_n).

2°) Soit h un réel strictement positif. Montrer que si $5 - h < u_n < 5 + h$ alors $5 - h < u_{n+1} < 5 + h$.

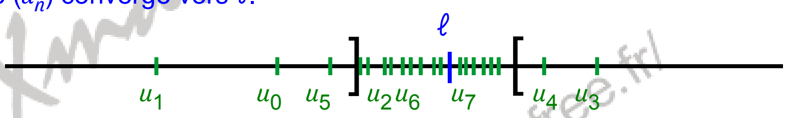
3°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 8$ on a $4{,}9 \leqslant u_n \leqslant 5{,}1$

4°) Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geqslant$ N on ait $4{,}999 \leqslant u_n \leqslant 5{,}001$

Définition (voir animation)

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.
Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ, ou que la suite (u_n) converge vers ℓ.

On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.



Remarques

- On ne peut envisager la notion de limite d'une suite que lorsque n tend vers $+\infty$.
  n étant un entier la notion de limite lorsque n tend vers 0 ou lorsque n tend vers 5 (par exemple) n'a pas de signification.
- Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel ℓ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel ℓ revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Propriété (voir démonstration 01)

Si une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ, alors cette limite est unique.

Exercice 04 (voir réponses et correction)

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

1°) Déterminer un entier naturel N tel que : pour tout $n \geqslant N$ $u_n \in \left]-0,1 ; 0,1\right[$.

2°) Justifier en utilisant la définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On considère la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1°) Calculer $u_1, u_2 \dots u_{10}$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2°) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

3°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire l'intervalle $\left]1,99 ; 2,01\right[$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.

4°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire l'intervalle $\left]2 - r ; 2 + r\right[$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.

5°) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Définition

Soit (u_n) une suite.

Si tout intervalle de la forme $\left]A ; +\infty\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si tout intervalle de la forme $\left]-\infty ; A\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$. On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Remarques

- Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que tout intervalle $\left]A ; +\infty\right[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.
- Dans le cas où une suite a une limite ℓ finie, on dit parfois que la suite converge vers ℓ, mais on n'utilise pas le terme de convergence dans le cas d'une limite infinie.

Exercice 06 (voir réponses et correction)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n^2 + 100}{7n}$ pour $n \geqslant 1$.

1°) Donner, en utilisant une calculatrice ou un tableur, des valeurs approchées à 10^{-2} près de $u_1, u_2 \dots u_7$.

2°) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un tableur.
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

3°) On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel u_n appartient à l'intervalle $\left]A ; +\infty\right[$.

A	10	20	100	5 489	12 548	100 000
n	1	46				

4°) Soit A un nombre réel supérieur ou égal à 10.
Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\left]A ; +\infty\right[$.
Les valeurs trouvées pour n_0 correspondent-elles au tableau de la question précédente ?

5°) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 07 (voir réponses et correction)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 11}{5}$

1°) Donner les valeurs exactes de u_1 ; u_2 ; u_3, puis en donner des valeurs décimales à 10^{-2} près.

2°) En utilisant une calculatrice ou un tableur, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de u_{10} et u_{20} .

3°) On considère A un nombre réel. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-dessous, le premier entier n pour lequel u_n appartient à l'intervalle $]A ; +\infty[$.

A	10	20	100	5 000	12 000	256 431
n						

4°) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 09 (voir réponses et correction)

Soit a un nombre réel strictement positif.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

2°) Soit A un réel. Justifier que pour n assez grand, $1 + na > A$.

3°) En déduire que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

II Limites et ordre

Propriété (voir démonstration 02)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soit n_0 un entier naturel.

Si pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n \leqslant v_n$; si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarques

- La propriété ci-dessus n'est pas vraie avec des inégalités strictes.
  Si $u_n < v_n$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$, mais seulement $\ell \leqslant \ell'$.
  Par exemple en prenant $u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$;
  on a $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- La propriété ci-dessus permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une suite.
  (Cette propriété n'est utilisable qu'à condition d'être certain que les deux suites ont une limite)

Exercice 10 (voir réponses et correction)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 2$; $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{3}{5}v_n + 2$

1°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$.

2°) Si les suites (u_n) et (v_n) ont des limites finies ℓ et ℓ' que peut-on dire de ℓ et ℓ' ?

3°) En utilisant un tableur, conjecturer la limite de chacune des suites.

Propriété (voir démonstration 03)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soit n_0 un entier naturel.

Si pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarques

- Cette propriété se traduit par : "une suite supérieure à une suite tendant vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$".
- On a une propriété similaire pour une suite qui tend vers $-\infty$:
  Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soit n_0 un entier naturel.

  Si pour tout $n \geqslant n_0$ $\quad u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

  Cette propriété se traduit par : "une suite inférieure à une suite tendant vers $-\infty$ tend aussi vers $-\infty$".

Exercice 11 (voir **réponses et correction**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n\sqrt{n} - 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) En écrivant u_n sous la forme $u_n = n(\sqrt{n} - 8)$, déterminer un entier n_0 tel que $u_n > n$ pour tout $n \geqslant n_0$.

2°) En déduire la limite de la suite (u_n).

Propriété (théorème des gendarmes) (admis)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et soit n_0 un entier naturel.

Si pour tout $n \geqslant n_0$ $\quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$.

On sait que pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

La suite (u_n) est donc encadrée par les deux suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = -\dfrac{1}{n}$ et $w_n = \dfrac{1}{n}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. On peut donc en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 (voir **réponses et correction**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n + \sin n}$

1°) En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2°) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2} < u_n$. (On dit que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$)

3°) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$.

4°) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13 (voir **réponses et correction**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

1°) Donner, en utilisant une calculatrice, des valeurs décimales approchées de u_0 , u_1 , ... , u_{10} et u_{100} .

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

On dit que la suite (u_n) est minorée par -1 et majorée par 3.

3°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

4°) Démontrer que pour n suffisamment grand on a $u_n > 2{,}999$. Que peut-on penser de la limite de (u_n) ?

Définition

Si pour tout entier n on a $u_n \leqslant M$, on dit que la suite (u_n) est majorée par M.

M est un majorant de la suite (u_n).

Si pour tout entier n on a $m \leqslant u_n$, on dit que la suite (u_n) est minorée par m.

m est un minorant de la suite (u_n).

Lorsqu'une suite est majorée et minorée, on dit qu'elle est bornée.

Exemple

La suite définie dans l'exercice 13 est minorée par -1 et majorée par 3. C'est une suite bornée.

Remarques

- Lorsqu'une suite est majorée, elle n'a pas un unique majorant.
  Par exemple si (u_n) est majorée par 3, elle est, a fortiori, majorée par 4.
- Il en est de même pour les minorants.

Propriété (admise)

Une suite croissante majorée est convergente (c'est-à-dire qu'elle a une limite finie).

Remarques

- La propriété ci-dessus permet de justifier qu'une suite a une limite finie, mais elle ne permet pas de donner la valeur de cette limite.
- D'après les propriétés vues sur les limites, si une suite est majorée par K, sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à K.
- De la même façon on admet la propriété : Une suite décroissante minorée est convergente.

Exercice 14 (voir **réponses et correction**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 . Placer les points correspondants sur une droite graduée.

2°) Démontrer que la suite (u_n) est majorée.

3°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4°) Justifier que la suite (u_n) a une limite finie. Que peut-on penser de la valeur de cette limite ?

Remarque

Lorsqu'une suite définie par récurrence a une limite finie ℓ, on admettra que la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite ℓ.
Attention néanmoins, il faut être certain que la suite a bien une limite finie.

Propriété (voir démonstration 04)

Soit (u_n) une suite croissante telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Alors pour tout entier n on a $u_n \leqslant \ell$.

Propriété (voir démonstration 05)

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Remarques

- De même une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.
- Attention, une suite non majorée mais qui n'est pas croissante n'a pas nécessairement une limite (et de même pour une suite non minorée mais qui n'est pas décroissante).
  C'est le cas par exemple de la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$.
- Une suite croissante a donc toujours une limite, c'est soit une limite finie (dans le cas où la suite est majorée), soit $+\infty$ dans le cas où la suite n'est pas majorée (et de même une suite décroissante a toujours une limite).

Exercice 15 (voir **réponses et correction**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1°) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 ; u_2 ; ... ; u_{10} .

2°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4°) Justifier que la suite (u_n) a une limite finie. Quelle est cette limite.

III Opérations sur les limites

Propriétés (admises)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Si (u_n) a pour limite finie ℓ et si (v_n) a pour limite finie ℓ', alors

- $(u_n + v_n)$ a pour limite finie $\ell + \ell'$
- $(u_n \times v_n)$ a pour limite finie $\ell \times \ell'$
- si $\ell' \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite finie $\frac{\ell}{\ell'}$.

Exercice 16 (voir **réponses et correction**)

En utilisant les propriétés précédentes et en sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, déterminer la limite des suites :

1°) $\left(5 + \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ 2°) $\left(-\frac{3}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ 3°) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ 4°) $\left(\frac{1 - 2n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$

Remarque

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux suites (u_n) et (v_n) lorsqu'on connaît la limite de chacune des deux suites et la limite de l'inverse d'une suite (u_n) dont on connaît la limite.

La plupart des résultats se comprennent de façon intuitive. Ils peuvent tous être démontrés en utilisant les définitions données précédemment. ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n) + (v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si (u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) définie par :

1°) $u_n = n^2 + n$ 2°) $u_n = n(n - 1)$ 3°) $u_n = n^2 - n$ 4°) $u_n = 3n - \frac{2}{n}$

Remarque

Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.

Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Remarque

Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de «forme indéterminée».

Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$ $0 \times \infty$ $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

Ces notations, incorrectes, sont à proscrire dans un devoir rédigé.

Exercice 18 (voir réponses et correction)

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) définie par :

1°) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right)$ 2°) $u_n = (n - 1)\left(\frac{1}{n}\right)$ 3°) $u_n = \frac{n + 2}{n + 1}$ 4°) $u_n = \frac{n^2 + n}{3 - 2n}$

Propriété (voir démonstration 06)

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors q^n n'a pas de limite.

Exemples

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{99}{100}\right)^n = 0$; $(-5)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 19 (voir réponses et correction)

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -5.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

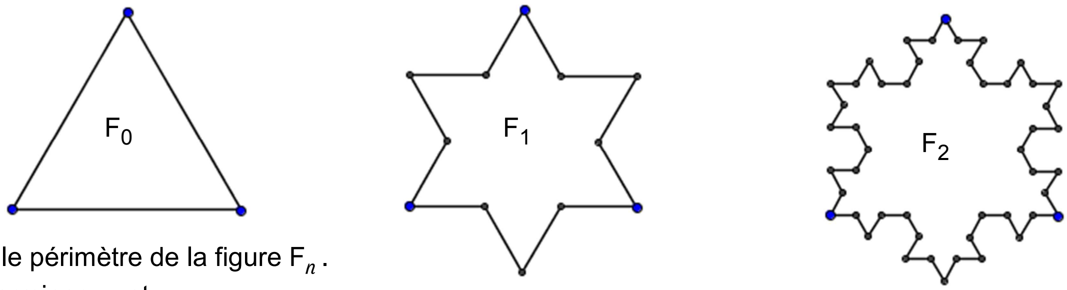
2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = -5$ et de raison 2.
Déterminer l'expression de v_n en fonction de n. En déduire la limite de (v_n).

3°) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 5 - 2n + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déterminer la limite de (w_n).

Exercice 20 (voir réponses et correction)

On considère un triangle équilatéral de côté 1. On considère la transformation qui consiste à couper chaque segment en trois segments égaux et à remplacer la partie centrale par deux segments de même longueur. On répète cette transformation et on appelle F_n la figure obtenue après n transformations.

On appelle Flocon de Von Koch la figure obtenue après un nombre infini de transformations.



Soit p_n le périmètre de la figure F_n.

1°) Déterminer p_0 et p_1.

2°) Justifier que la suite (p_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

3°) Exprimer p_n en fonction de n. Donner des valeurs approchées de p_{10} et p_{50}. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 21 (voir réponses et correction)

Un escargot grimpe le long d'un tronc d'arbre. La 1ère heure il grimpe de 1 mètre, la 2ème heure, fatigué, il ne grimpe que de 0,5 m et ainsi de suite : à chaque heure passée il grimpe deux fois moins que l'heure d'avant.

1°) De quelle distance a-t-il grimpé en 5 heures.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de n la distance d_n dont l'escargot a grimpé en n heures.

3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 22 (voir réponses et correction)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$

1°) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3., puis déterminer des valeurs approchées de u_4, u_5, ... , u_{20}.

2°) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?

3°) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 6 + \frac{12}{2^n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

4°) Exprimer v_{n+1} et $\frac{1}{2} v_n + 3$ en fonction de n. Que peut-on en conclure ? Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 23 (voir réponses et correction)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 3}$.

a) calculer v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

3°) Exprimer u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 24 (voir réponses et correction)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et la suite (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4.

2°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3°) Donner l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

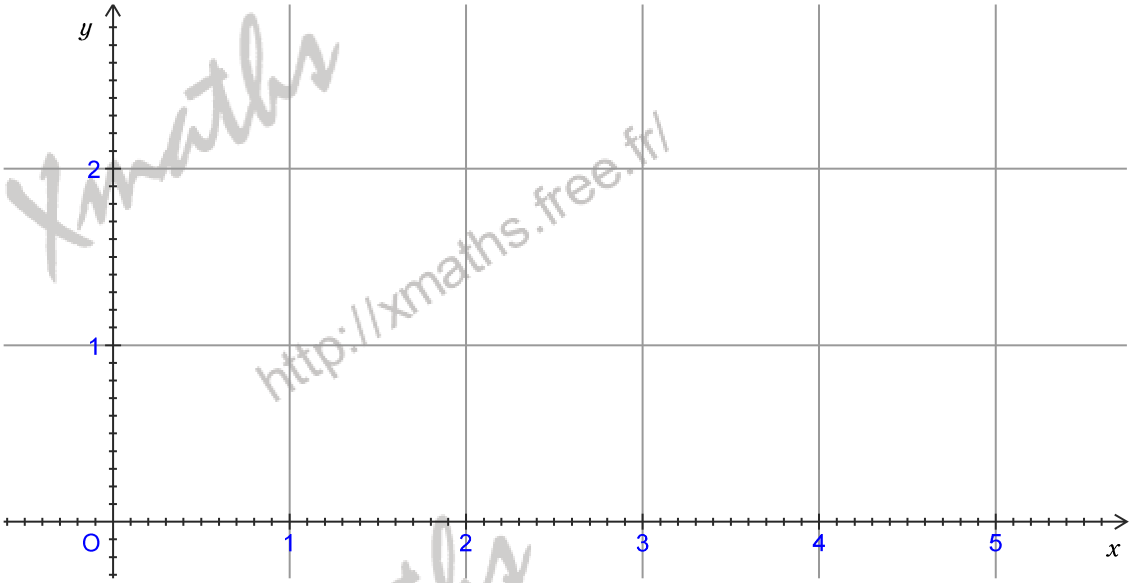
4°) Justifier que tous les nombres u_n, sauf u_0, ont une écriture décimale se terminant par le chiffre 3.

Exercice 25 (voir **réponses et correction**) (voir animation)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + 1}$. On admettra que f est croissante.

1°) Tracer dans le repère ci-dessous, la courbe $(\mathscr{C})$ de f, et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe (Ox) le point A_0 d'abscisse u_0.



2°) Placer sur la courbe $(\mathscr{C})$ le point B_0 d'abscisse u_0.
Quelle est l'ordonnée de B_0 ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée).
Tracer la droite parallèle à (Ox) passant par B_0. Cette doite coupe D en un point C_0.
Quelles sont les coordonnées de C_0 ?
Tracer la droite parallèle à (Oy) passant par C_0. Cette droite coupe (Ox) en un point A_1.
Justifier que A_1 a pour abscisse u_1.

3°) Reprendre la méthode de la question 2°) pour construire les points B_1, C_1, A_2, puis les points B_2, C_2, A_3.

4°) Conjecturer, à l'aide du graphique, la limite ℓ de la suite (u_n).

5°) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, conjecturer une valeur approchée à 10^{-6} près de ℓ.
Donner la valeur exacte de ℓ.

6°) La valeur de ℓ sera-t-elle différente si on change la valeur du premier terme u_0 ?

Exercice 26 (voir **réponses et correction**) (voir animation)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

1°) Tracer dans un repère orthonormal d'unité 1cm, la courbe (Δ) de f, et la droite D d'équation $y = x$.

2°) En utilisant la méthode de l'exercice 25, construire les points de l'axe (Ox) d'abscisses u_1 ; u_2 ; u_3.; u_4.

3°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3.; u_4.

4°) Conjecturer, à l'aide du graphique, la limite ℓ de la suite (u_n).

5°) En utilisant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
Démontrer que (u_n) a une limite et donner la valeur de cette limite.