LES SUITES

1. Définition

1.1. Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0.

La notation (u_n) désigne la suite en tant qu'objet mathématique et u_n désigne l'image de l'entier n (appelé encore terme d'indice n de la suite (u_n)), terme que l'on pourrait noter $u(n)$ mais l'usage en a voulu autrement.

Exemples :

- Suite définie en fonction du rang (du type $u_n = f(n)$) :

$$u_n = \frac{1}{n}, \text{ pour } n \geqslant 1$$

On obtient : $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3}$ etc ...

- Suite définie en fonction de terme(s) précédent(s) (suite récurrente) :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

On obtient : $u_1 = u_0(1 - u_0) = -2$; $u_2 = -6$; $u_3 = -42$ etc.

Exercice : déterminer le rang à partir duquel la suite (u_n) suivante est définie :

$$u_n = \sqrt{n-3}$$

2. Suites arithmétiques

2.1. Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r : $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout indice n

Ce nombre r s'appelle la raison de la suite (u_n).

M1 : comment vérifier qu'une suite (u_n) est arithmétique ?

→ On calcule, pour tout indice n, la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$. Si obtient une quantité constante r, alors la suite est arithmétique de raison r. Si on obtient une quantité variable (dépendante de n), alors la suite n'est pas arithmétique.

Exemples : les suites suivantes sont elles arithmétiques ?

1) $u_n = 3n - 2$.

Pour tout indice n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 2 - 3n + 2 = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$$

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

2) $u_n = n^2 + 1$.

Pour tout indice n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Suite non arithmétique.

Notons que cette conclusion est immédiate à la vue des premiers termes ($u_1 = 2 = u_0 \mathbf{+ 1}$, $u_2 = 5 = u_1 \mathbf{+ 3}$)

Remarque : toute suite définie par une relation du type $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a car pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - an - b = a.$$

Réciproquement, peut-on dire que toute suite arithmétique de raison a peut s'écrire sous la forme $u_n = an + b$?

La réponse est dans ce qui suit.

M2 : comment calculer un terme quelconque d'une suite arithmétique ?

→ On utilise l'une des relations suivantes : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$ (pour tous entiers p et n)

Exemples : Calculer u_{26} dans les deux cas suivants :

1) $u_0 = 6$ et $r = 5$: $u_{26} = u_0 + 26r = 6 + 26\times5 = 136$
2) $u_{10} = 3$ et $r = -2$: $u_{26} = u_{10} + 16r = 3 + 16\times(-2) = -29$

Exercice : démontrer que toute suite arithmétique (u_n) peut s'écrire : $u_n = an + b$.

En effet, si on note r la raison de la suite, on a, d'après M2 : $u_n = u_0 + nr$

Il suffit de choisir $a = r$ et $b = u_0$ pour avoir le résultat demandé.

M3 : comment calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

→ On utilise la relation suivante :

$$S = \frac{N(P+D)}{2}$$

où N = nombre de termes de la somme, P = premier terme de la somme et D = dernier terme de la somme.

Exemples : calculer les sommes suivantes :

1) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 99$

Nous avons affaire à la somme de termes d'une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$.

Mais combien de termes comporte cette somme ?

Notons $u_n = 99$ où n désigne le nombre de termes de la somme.

D'après M2, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$. C'est-à-dire : $99 = u_1 + (n-1)\times2 = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

D'où $n = 50$. Il y a donc 50 termes dans cette somme.

Ce qui donne, d'après M3 : $S = \dfrac{50(1+99)}{2} = 2500$

2) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$.

Somme des n termes d'une suite arithmétique de raison $r = 1$, de premier terme $P = 1$ et de dernier terme $D = n$, d'où : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice : en s'inspirant de la méthode de l'exemple 1, démontrer que le nombre de termes N d'une somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, de premier terme P, et dernier terme D, est donné par la formule :

$$N = \frac{D - P}{r} + 1$$

En déduire que, dans la somme $u_p + ... + u_q$ (où $p \leqslant q$), il y a $N = q - p + 1$ termes.

Quelques démonstrations :

M1 : évident, les relations $u_{n+1} - u_n = r$ et $u_{n+1} = u_n + r$ sont équivalentes.

M2 : soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On considère la propriété $\wp(n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : u_n = u_0 + nr$$

Si $n = 0$, la propriété est clairement vérifiée donc $\wp(0)$ est vraie.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Supposons donc, que l'on ait $\wp(n)$, c'est-à-dire :

$$u_n = u_0 + nr$$

D'après la définition d'une suite arithmétique, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le raisonnement ci-contre est appelé raisonnement "par récurrence"

Mais comme on a supposé $\wp(n)$, cela donne :

$$u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

On obtient la relation de récurrence au rang $n + 1$, à savoir $\wp(n+1)$.

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Résumons : si la propriété est vraie à un certain rang, elle est vraie au rang suivant. Comme elle est vraie au rang 0, elle est donc vraie à tout rang.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$

En remplaçant n par p, on obtient également :

$$u_p = u_0 + pr$$

Et par différence des deux dernières relations :

$$u_n - u_p = (n - p)r$$

D'où : $u_n = u_p + (n - p)r$

M3 : soit à calculer :

$$S = P + (P + r) + ... + (D - r) + D$$

(somme comprenant N termes)

Cette somme S peut encore s'écrire :

$$S = D + (D - r) + ... + (P + r) + P$$

(on a changé l'ordre des termes)

Si bien que, en additionnant :

$$2S = (P + D) + (P + D) + ... + (P + D) + (P + D)$$

(somme comprenant toujours N termes **égaux** !)

D'où : $2S = N(P + D)$

$$S = \frac{N(P + D)}{2}$$

3. Suites géométriques (de raison strictement positive)

3.1. Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q : $u_{n+1} = q\, u_n$

Ce nombre q s'appelle la raison de la suite (u_n).

M4 : comment vérifier qu'une suite est géométrique ?

→ Après s'être assuré que u_n n'est jamais nul, on calcule, pour tout indice n, le rapport de deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si on obtient une quantité constante q, alors la suite est géométrique de raison q. Si on obtient une quantité variable, alors la suite n'est pas géométrique.

Variante (permettant d'éviter de raisonner avec un rapport et rendant les calculs moins lourds) : on montre qu'il existe un réel q tel que, pour tout indice n, on ait $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples : les suites suivantes sont elles géométriques ?

1) $u_n = 1{,}01^n$.

On a, pour tout indice n : $u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1{,}01^{n+1}}{1{,}01^n} = 1{,}01$

Suite géométrique de raison $q = 1{,}01$.

Avec la variante de de M4, il suffit d'écrire que pour tout indice n :

$$u_{n+1} = 1{,}01^{n+1} = 1{,}01 \times 1{,}01^n = 1{,}01u_n$$

2) $u_n = n^2$ (pour $n \geqslant 1$).

On a pour tout indice n : $u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$

Suite non géométrique.

Notons que cette conclusion est immédiate à la vue des premiers termes ($u_2 = 4 = u_1 \times \mathbf{4}$, $u_3 = 9 = u_2 \times \mathbf{\frac{9}{4}}$)

Remarque : toute suite définie par une relation du type $u_n = \lambda\, a^n$ (pour $n \geqslant 0$ et $a > 0$) est géométrique de raison a car pour tout n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Réciproquement, peut-on dire que toute suite géométrique de raison q peut s'écrire sous la forme $u_n = \lambda\, a^n$?

La réponse est dans ce qui suit.

M5 : comment calculer un terme quelconque d'une suite géométrique ?

→ On utilise l'une des relations suivantes : $u_n = q^n\, u_0$ ou $u_n = q^{n-p}\, u_p$ (pour $p \leqslant n$)

Exemples : Calculer u_7 dans les deux cas suivants :

1) $u_0 = \frac{1}{4}$ et $q = 2$: $u_7 = q^7\, u_0 = 2^7 \times \frac{1}{4} = 2^5 = 32$

2) $u_4 = 81$ et $q = \frac{1}{3}$: $u_7 = q^{7-4}\, u_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 81 = 3$

Exercice : démontrer que toute suite géométrique (u_n) peut s'écrire : $u_n = \lambda\, a^n$.

En effet, si on note q la raison de la suite, on a, d'après M5 : $u_n = q^n\, u_0$

Il suffit de choisir $a = q$ et $\lambda = u_0$ pour avoir le résultat demandé.

M6 : comment calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ?

→ Si $q \neq 1$, on peut utiliser la relation suivante :

$$S = \frac{P(1-q^N)}{1-q}$$

où N = nombre de termes de la somme, P = premier terme de la somme et q = raison de la suite.

→ Si $q = 1$ alors $S = N\,P$.

Exemples : calculer les sommes suivantes :

1) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 4096$.

Nous avons affaire à une somme de termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$. Se pose encore le problème du nombre de termes de cette somme. Pour cela, il suffit d'écrire les termes de la somme S à l'aide d'exposants :

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{12}$$

On en déduit que la somme S comporte 13 termes.

D'après M6, on obtient : $$S = \frac{1\times(1-2^{13})}{1-2} = 2^{13} - 1 = 8191$$

2) $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (pour $x \neq 1$, sinon $S = n + 1$)

Note : la formule de la somme de termes d'une suite géométrique (M6) prend parfois d'autres aspects :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \quad \text{ou encore} \quad S = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} ...$$

Enfin, la somme S des termes d'une suite géométrique de raison q, de premier terme P et dernier terme D, peut encore se calculer avec la formule suivante : $$\mathrm{S} = \frac{P - Dq}{1-q}$$

Preuve : comme $D = Pq^{N-1}$, il vient $P(1 - q^N) = P - Pq^N = P - Dq$.

Quelques démonstrations :

M4 : évident, les relations $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ et $u_{n+1} = q\, u_n$ étant équivalentes dès lors que $u_n \neq 0$.

M5 : soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Si $q = 0$ ou si $u_0 = 0$ alors (u_n) est la suite nulle est la relation $u_n = q^n u_0$ est triviale.

Supposons maintenant $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$.

Montrons, par récurrence (sur $n \in \mathbb{N}$), la propriété :

$$\wp(n) : u_n = q^n u_0$$

Si $n = 0$, la propriété est clairement vérifiée donc $\wp(0)$ est vraie.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$$

Supposons donc, que l'on ait $\wp(n)$, c'est-à-dire : $u_n = q^n u_0$

D'après la définition d'une suite géométrique, on a :

$$u_{n+1} = qu_n$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\wp(n)$, cela donne :

$$u_{n+1} = q\, q^n u_0 = q^{n+1} u_0$$

On obtient la relation de récurrence au rang $n + 1$, à savoir $\wp(n + 1)$.

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n + 1)$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = q^n u_0$

En remplaçant n par p, on obtient également : $u_p = q^p u_0$

On a donc : $u_n\, q^p u_0 = u_p\, q^n u_0$

Et comme $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$: $u_n = q^{n-p} u_p$

M6 : soit à calculer la somme :

$$S = P + qP + \ldots + q^n P$$

(somme comprenant $N = n + 1$ termes)

Remarquons que :

$$S - qS = P + qP + \ldots + q^n P - (qP + q^2 P + \ldots\, q^n P + q^{n+1} P) = P - Pq^{n+1}$$

D'où : $S(1 - q) = P(1 - q^{n+1})$

Si bien que si $q \neq 1$: $S = \dfrac{P(1-q^N)}{1-q}$

Remarque : si $q = 1$, alors $S = P + qP + \ldots + q^n P = P + P + \ldots + P = (n + 1)P = NP$.

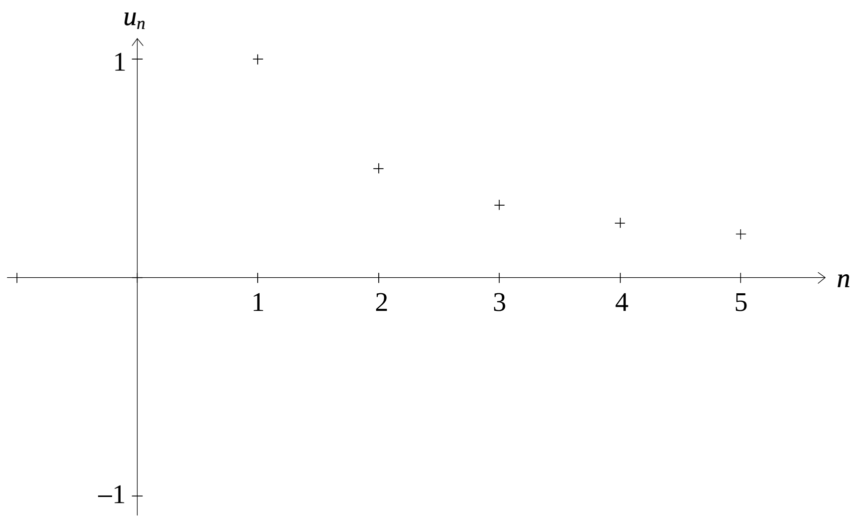
4. Représentation graphique d'une suite

4.1. Définition

On se place dans un repère $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\,)$. La représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\, u_n)$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Sa représentation graphique est l'ensemble des points isolés $(1\,;\,1)$, $(2\,;\,\frac{1}{2})$, $(1\,;\,\frac{1}{3})$ etc ...



4.2. Théorème

Si (u_n) est une suite arithmétique, alors sa représentation graphique est constituée de points **alignés**.

Exemple :

Représenter graphiquement la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.

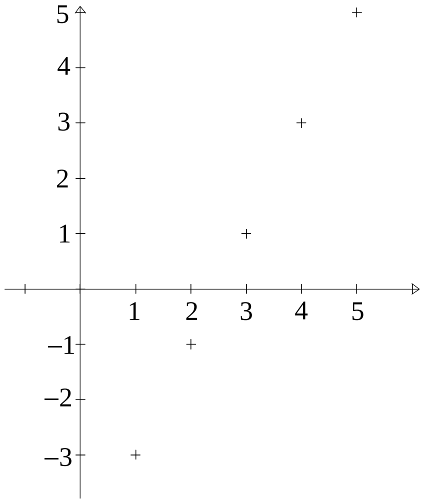
Équation de la droite obtenue ?

$$y = rx + u_0$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du fait que toute suite arithmétique peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = an + b$$

Ainsi les points de coordonnées (n, u_n) sont situés sur la droite d'équation $y = ax + b$.



5. Sens de variation (ou monotonie)

5.1. Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante (à partir du rang n_0)
- stationnaire lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$.
- constante si stationnaire et définie à partir du rang n_0.

On définit la stricte croissance (ou décroissance) à l'aide de l'inégalité stricte $u_n < u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$).

Notation : les intervalles d'entiers sont souvent notés à l'aide de crochets doubles. Par exemple :

$$[\![2;5]\!] = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

Si bien qu'on pourra écrire, par exemple, qu'une suite est croissante sur $[\![n_0 ; +\infty[\![$.

M7 : comment vérifier qu'une suite est croissante (ou décroissante) ?

$\to$ On calcule, pour tout indice n, la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$. Si on obtient une quantité positive, alors la suite (u_n) est croissante. Si on obtient une quantité négative, alors la suite (u_n) est décroissante. Si on obtient une quantité de signe variable alors la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Exemple : $u_n = 2n + \sin n$.

Étudions, pour tout entier n, le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + \sin(n + 1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n + 1) - \sin n$$

Or $-1 \leqslant \sin(n + 1) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -\sin n \leqslant 1$, donc $-2 \leqslant \sin(n + 1) - \sin n \leqslant 2$, par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

la suite (u_n) est donc croissante.

Cas d'une suite arithmétique :

5.2. Théorème

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration :

Comme (u_n) est arithmétique, on a pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

D'où le résultat en utilisant la définition 5.1.

Cas d'une suite géométrique :

On a vu précédemment que toute suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ est géométrique. Quel est son sens de variation ?

5.3. Théorème

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ (avec $a > 0$)

- Si $a > 1$ alors (u_n) est strictement croissante
- Si $a = 1$ alors (u_n) est constante
- Si $0 < a < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration :

On a, pour tout n : $$u_{n+1} - u_n = au_n - u_n = (a-1)u_n$$

Comme (u_n) est positive (puisque a l'est), le sens de variation ne dépend que du signe $a - 1$.

On conclut en utilisant la définition 5.1.

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique définie avec $u_0 = -8$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

D'après M5 : $$u_n = u_0 q^n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Posons $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Puisque $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_n > v_{n+1} \text{ pour tout } n$$

D'où : $$-8v_n < -8v_{n+1} \text{ pour tout } n$$

Or, $u_n = -8v_n$, d'où : $$u_n < u_{n+1} \text{ pour tout } n$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Autre méthode, en utilisant M7 : $$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$$

Or, $q^n > 0$ et $q - 1 < 0$ (puisque $q = \dfrac{1}{2}$). Et comme $u_0 < 0$ (car $u_0 = -8$), on en déduit que :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Cas des suites du type $u_n = f(n)$:

5.4. Théorème *Où l'on utilise **une fonction associée***

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

Si la fonction f est monotone sur $[a\,;+\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone sur $[\![E(a)+1;+\infty[\![$ et possède le même sens de variation que f.

Démonstration :

Supposons f croissante sur $[a\,;+\infty[$. (Les autres cas se prouvent de manière analogue)

Pour tout $n \in [\![E(a)+1;+\infty[\![$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) \geqslant 0$$

Donc (u_n) est croissante sur $[\![E(a)+1;+\infty[\![$.

Exemple : soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$

Notons f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$

On a en dérivant : $f'(x) = \dfrac{\pi}{x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$

Or, $\sin\dfrac{\pi}{x} \geqslant 0$ pour tout x de $[1\,;+\infty[$ puisque $\dfrac{\pi}{x} \in \,]0\,;\pi[$. Donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

La suite (u_n) est donc croissante.

6. Limite d'une suite

6.1. Définition

On dit qu'une suite admet une limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque :

Tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice

Graphiquement, cela se traduit ainsi :

***Quelle que soit la largeur de la bande** horizontale choisie, **il existe un rang** (ou un indice) à partir duquel **tous** les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.*

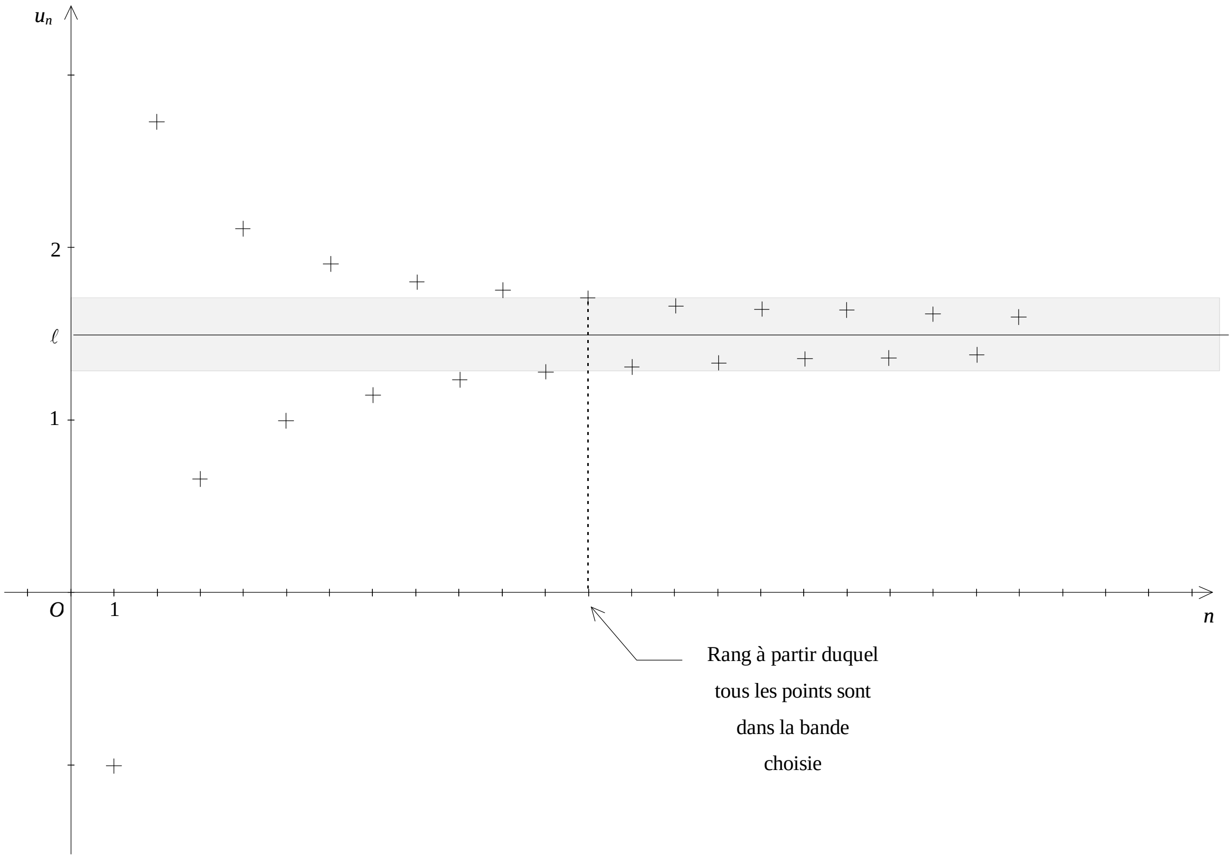
De manière plus formelle :

Pour tout réel ε strictement positif, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Illustration avec la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$$



Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

L'utilisation directe de cette définition n'est pas toujours commode. Heureusement, nous disposons de théorèmes (voir ci-dessous) pour prouver la convergence d'une suite dont l'emploi est bien plus aisé que cette définition. Cette définition sera surtout utile dans la démonstration de certains théorèmes (comme le théorème des gendarmes par exemple).

Notons qu'il existe des suites qui ne convergent pas (on dit alors qu'elles divergent). Il y en a de deux types :

Celles qui ont une limite infinie : par exemple $u_n = n$.

Celles qui n'ont pas de limite : par exemple $u_n = (-1)^n$. ($u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$)

Techniques pour montrer qu'une suite est convergente :

1) Cas des suites du type $u_n = f(n)$: les théorèmes énoncés sur les limites de fonctions s'appliquent

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

En conséquence, on récupère tous les théorèmes sur les opérations algébriques ainsi que les théorèmes de comparaison.

Exemples :

Avec le théorème des "gendarmes"

Soit : $$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \text{ pour } n \geqslant 1$$

Étudions la limite de la suite (u_n).

On a : $$n^2 < n^2 + 1$$

En outre, $n^2 + 1 < (n + 1)^2$. (En effet, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 1$ car $2n > 2 > 0$)

On a donc l'encadrement suivant : $$n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$$

Par passage à la racine (tous les membres sont positifs), il vient :

$$n < \sqrt{n^2+1} < n + 1$$

Puis en divisant par n (positif) : $$1 < u_n < 1 + \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, on en déduit (théorème des gendarmes) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Avec les théorèmes de comparaison

Soit : $$u_n = n^4(\cos n - 2)$$

Étudions la limite de la suite (u_n) :

Comme $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a : $-3 \leqslant \cos n - 2 \leqslant -1$, donc $u_n \leqslant -n^4$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^4) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. (On dit alors que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$)

Exemple : déterminer la limite de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$u_n = \frac{3n-1}{2n} \text{ et } w_n = \frac{3n+1}{2n}$$

Les suites (u_n) et (w_n) convergent vers $\frac{3}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$

2) Cas des suites récurrentes : voir les exercices où des indications seront données.

3) Cas particulier des suites géométriques

6.2. Théorème

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ (avec $a > 0$)

- Si $a \in [0\ ;\ 1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
- Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- Si $a \in]1\ ;\ +\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$).

Démonstration :

Nous allons utiliser le résultat suivant :

6.3. Lemme *Inégalité de Bernoulli*

Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Démonstration du lemme :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\wp(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

Remarque : on peut étendre cette inégalité à $x \in]-1, +\infty[$

$$\wp(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

- On a $\wp(0)$ puisque $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x)$$

  Or : $\quad (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + n\,x^2 = 1 + (n + 1)x + n\,x^2$

  Comme $n\,x^2 \geqslant 0$, on a : $\quad (1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$

  D'où : $\quad (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

  Bilan : on a $\wp(0)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\quad \wp(n)$

  $$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Prouvons maintenant le théorème 6.2. :

Supposons $a \in]1\ ;\ +\infty[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

Supposons maintenant $a \in [0\ ;\ 1[$.

Si $a = 0$, le résultat est évident.

Si $a \neq 0$, posons : $$a' = \frac{1}{a}$$

Alors : $$a' \in]1\ ;+\infty[$$

D'après le résultat précédent : $$\lim_{n\to+\infty} a'^n = +\infty$$

Par passage à l'inverse, nous obtenons : $$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

Enfin, si $a = 1$, le résultat est évident.

7. Complément : suites arithmético-géométriques

Ce sont les suites (u_n) de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels.

Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b.

Si $a \neq 1$, on pose alors $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. (ω est la solution de l'équation $X = aX + b$; on a donc $\omega = a\omega + b$; ω est la seule limite possible pour la suite (u_n))

On définit alors une nouvelle suite (v_n) par : $v_n = u_n - \omega$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Écart entre la suite (u_n) et sa limite éventuelle)

On vérifie que cette nouvelle suite (v_n) est géométrique. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \omega = au_n + b - \omega = a(v_n + \omega) + b - \omega = av_n + a\omega + b - \omega = av_n$$

La suite (v_n) est donc bien géométrique de raison a. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0\, a^n$$

(Si $|a| < 1$ alors la suite (v_n) converge vers 0, si $a = -1$ ou $|a| > 1$ alors la suite (v_n) diverge)

d'où :

$$u_n = v_n + \omega = v_0\, a^n + \omega = (u_0 - \omega)a^n + \omega$$

(Si $|a| < 1$ alors la suite (u_n) converge vers ω, si $a = -1$ ou $|a| > 1$ alors la suite (u_n) diverge)

Exemple : $u_{n+1} = 2u_n + 3$, avec $u_0 = 1$. Calculer u_{100}.

Dans ce cas, on a : $a = 2$, $b = 3$ et $\omega = -3$ d'où $u_n = 4 \times 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$, d'où $u_{100} = 2^{102} - 3$ et (u_n) diverge.

8. Exercices résolus

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000 \quad \text{et} \quad S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + ... + 9998 + 9999.$$

Exercice 2

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$.

Exercice 3

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 €. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.

On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$)

Exercice 4

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

<u>**SOLUTIONS**</u>

Exercice 1

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On en déduit immédiatement :

$S_1 = 1 + 2 + ... + 1999 + 2000 = \dfrac{2000 \times 2001}{2} = 2001000$.

$S_1 + S_2 = 1 + 2 + ... + 9999 = \dfrac{9999 \times 10000}{2} = 49995000$ d'où $S_2 = 49995000 - S_1 = 47994000$.

Exercice 2

1) <u>Calcul de la raison r</u> :

On a : $$u_n = u_p + (n - p)r$$

D'où, lorsque $n \neq p$: $$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Avec $n = 100$ et $p = 50$, cela donne : $r = \dfrac{u_{100} - u_{50}}{100 - 50} = \dfrac{806 - 406}{50} = 8$

<u>Calcul de u_0</u> :

On a : $$u_{100} = u_0 + 100r$$

D'où : $$u_0 = u_{100} - 100r = 806 - 100 \times 8 = 6$$

2) Rappelons que dans la somme $S = u_p + ... + u_n$, il y a $N = n - p + 1$ termes.

La somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$ contient donc $N = 100 - 50 + 1 = 51$ termes.

En outre, S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 8$.

Nous pouvons donc utiliser la formule :

$$S = \frac{N(P + D)}{2}$$

Avec $P = u_{50} = 406$ et $D = u_{100} = 806$, nous obtenons :

$$S = \frac{51(406 + 806)}{2} = 30906$$

Exercice 3

Rappelons qu'une augmentation de t% se traduit par une multiplication par $1 + \dfrac{t}{100}$.

En particulier, le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2% est 1,02.

1) $u_2 = u_1 + \dfrac{2}{100} u_1 = (1 + \dfrac{2}{100})u_1 = 1{,}02u_1 = 1{,}02 \times 500 = 510$. De même, $u_3 = 1{,}02u_2 = 1{,}02 \times 510 = 520{,}2$.

La deuxième année, l'ingénieur touche une prime de 510 € et la troisième année une prime de 520,20 €.

2) La prime u_{n+1} s'obtient de la prime u_n par augmentation de 2% donc :

$$u_{n+1} = 1{,}02\ u_n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1$$

On en déduit, par définition, que la suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 1{,}02$.

3) <u>Calcul de u_{20}</u> : comme (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$u_n = q^{n-1}\, u_1$$

En particulier, avec $n = 20$, $q = 1{,}02$ et $u_1 = 500$, cela donne :

$$u_{20} = 1{,}02^{19} \times 500 \simeq 728{,}41 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

La vingtième année, l'ingénieur touchera une prime 728,41 € (au centime d'euro près).

4) $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$ est une somme de $N = 20$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Nous pouvons donc utiliser la formule :

$$S = \frac{P(1-q^N)}{1-q}$$

Ce qui, dans notre cas ($P = u_1 = 500$), donne :

$$S = \frac{500(1-1{,}02^{20})}{1-1{,}02} \simeq 12148{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

La somme totale des primes touchées par l'ingénieur sur les 20 années est : 12149 € (à un euro près)

Exercice 4

1) On a : $$w_n = u_n + v_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} + \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2} = 3 \times 2^n$$

La suite (w_n) est du type $w_n = ba^n$ avec $b = 3$ et $a = 2$. C'est donc une suite géométrique de raison $q = a = 2$.

En effet, les termes de (w_n) sont clairement non nuls et pour tout entier n, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$$

2) On a : $$t_n = u_n - v_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} - \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2} = -4n + 3$$

La suite (t_n) est du type $t_n = an + b$ avec $a = -4$ et $b = 3$. C'est une suite arithmétique de raison $r = a = -4$.

En effet, pour tout entier n, on a :

$$t_{n+1} - t_n = -4(n+1) + 3 - (-4n + 3) = -4$$

3) On a, pour tout entier n :

$$\frac{1}{2}(w_n + t_n) = \frac{1}{2}(u_n + v_n + u_n - v_n) = \frac{1}{2} \times 2 \times u_n = u_n$$

4) D'après la question 3), chaque terme u_k ($0 \leqslant k \leqslant n$) de la somme S peut s'écrire : $u_k = \frac{1}{2}(w_k + t_k)$

Ainsi : $$S_n = \frac{1}{2}(w_0 + t_0) + \frac{1}{2}(w_1 + t_1) + ... + \frac{1}{2}(w_n + t_n)$$

En factorisant par $\frac{1}{2}$ et en regroupant les termes de la suite (w_n) et ceux de la suite (t_n), on obtient :

$$S_n = \frac{1}{2}[(w_0 + w_1 + ... + w_n) + (t_0 + t_1 + ... + t_n)]$$

Or, d'après la question 1, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$. On a donc :

$$w_0 + w_1 + ... + w_n = \frac{P(1-q^N)}{1-q} = \frac{w_0(1-2^{n+1})}{1-2} = 3(2^{n+1} - 1)$$

Et d'après la question 2, la suite (t_n) est arithmétique de raison $r = -4$. On a donc :

$$t_0 + t_1 + ... + t_n = \frac{N(P+D)}{2} = \frac{(n+1)(t_0 + t_n)}{2} = \frac{(n+1)(3-4n+3)}{2} = (n+1)(3-2n)$$

Finalement :

$$S_n = \frac{1}{2}[3(2^{n+1} - 1) + (n+1)(3-2n)] = 3\times 2^n - n^2 + \frac{1}{2}n$$

Exercice 5

1) $u_0 = 3$; $u_1 = \dfrac{2}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{1+u_1} = \dfrac{4}{3}$

On a : $u_1 - u_0 = -\dfrac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{5}{6}$. Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, on en déduit immédiatement que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

On a : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{3}$. Comme $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$, on en déduit immédiatement que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) Considérons la propriété $\wp(n)$ = "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$" définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$, on a $\wp(0)$.
- Montrons : $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\wp(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

Ajoutons 1 : $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on déduit :

$$\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{1+u_n} \geqslant \frac{1}{4}$$

Multiplions par 2 : $2 \geqslant \dfrac{2}{1+u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$

D'où : $2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Or : $3 \geqslant 2$ et $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$, d'où : $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$

On a donc $\wp(n+1)$.

Du principe de récurrence, on déduit $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3) a) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2}{5}$; $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\dfrac{1}{5}$; $v_2 = \dfrac{u_2 - 1}{u_2 + 2} = \dfrac{1}{10}$.

La suite (v_n) semble géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

Démontrons-le ; pour cela, nous allons exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2}{1+u_n} - 1}{\dfrac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{2(2+u_n)}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{2(2+u_n)} = -\frac{1}{2} v_n$$

Nota : il n'y a pas "d'accidents" dans toutes ces fractions puisque $u_n \neq -2$ et $u_n \neq -1$ (question 2).

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

b) Exprimons v_n en fonction de n. Puisque (v_n) est une suite géométrique, nous avons :

$$v_n = q^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$$

c) Exprimons u_n en fonction de v_n. Pour cela, on utilise la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

En multipliant par $u_n + 2 \neq 0$: $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$

Factorisons par u_n : $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$

Divisons par $v_n - 1 \neq 0$: $u_n = \dfrac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$

Calculons u_{10} : $u_{10} = \dfrac{1 + 2v_{10}}{1 - v_{10}}$

Or, $v_{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2^{10}} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2^9 \times 5}$.

D'où : $u_{10} = \dfrac{1 + \dfrac{2}{2^9 \times 5}}{1 - \dfrac{1}{2^9 \times 5}} = \dfrac{2^9 \times 5 + 2}{2^9 \times 5 - 1} = \dfrac{2562}{2559} \simeq 1{,}00117$ (à 10^{-5} près)